

Cours 11 : Théorèmes de comparaison de Sturm

Nous allons démontrer les résultats classiques de comparaison des zéros de solutions d'équations du type (HS). Plus précisément, considérons les équations

$$(HS1) \quad (p_1(t)x')' + q_1(t)x = 0,$$

$$(HS2) \quad (p_2(t)x')' + q_2(t)x = 0,$$

où $p_i, q_i \in C^0([a, b], \mathbb{R})$, $-\infty < a < b \leq \infty$,
avec $p_i > 0$ sur $[a, b]$, $i=1, 2$.

Définition 11.1 : Si $p_1 \geq p_2$ et $q_1 \leq q_2$ sur $[a, b]$,
on dit que (HS2) est un majorant (de Sturm)

de (HS1). S'il existe $c \in [a, b)$ tel que $q_1(c) < q_2(c)$ ou $p_1(c) > p_2(c)$ et $q_2(c) \neq 0$, on dit que (HS2) est un majorant strict de (HS1).

Théorème 11.1 : Soit $x_1(t), x_2(t)$ des solutions de (HS1) et (HS2), respectivement, et soit $\vartheta_1(t), \vartheta_2(t)$ les angles de Prüfer correspondants.

(a) Si (HS2) est un majorant de (HS1), alors :

- $\vartheta_1(a) \leq \vartheta_2(a) \implies \vartheta_1(t) \leq \vartheta_2(t) \quad \forall t \in [a, b)$;
- $\vartheta_1(a) < \vartheta_2(a) \implies \vartheta_1(t) < \vartheta_2(t) \quad \forall t \in [a, b)$.

(b) Si (HS2) est un majorant strict de (HS1) avec un $c \in [a, b)$ comme dans la définition 11.1, alors

- $\vartheta_1(a) \leq \vartheta_2(a) \implies \vartheta_1(t) < \vartheta_2(t) \quad \forall t \in (c, b).$

(c) Si $b < \infty$, les conclusions des points (a) et (b) sont vraies jusqu'à $t = b$.

Pour prouver le Théorème 11.1, nous allons utiliser le résultat d'inégalités différentielles suivant.

Lemme 11.1: Supposons que $f \in C^0([a, b] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ est localement lipschitzienne en x . Soit :

(i) $u(t)$ l'unique solution du problème de Cauchy

$$u' = f(t, u), \quad u(a) = u_0 \in \mathbb{R};$$

(ii) $v(t)$ une fonction dérivable satisfaisant

$$v' \leq f(t, v), \quad v(a) \leq u_0,$$

sur un intervalle $[a, d) \subset [a, b)$.

Alors $v(t) \leq u(t)$ pour $t \geq a$ et dans l'intervalle maximal où u et v existent.

Preuve: Quitte à choisir d plus petit, supposons s.p.d.g. que u est solution de $u' = f(t, u)$ sur l'intervalle $[a, d)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit u_n la solution du pb. de Cauchy

$$u' = f(t, u) + \frac{1}{n}, \quad u(a) = u_0.$$

Par dépendance continue aux paramètres

(Théorème 4.1), on a que $u_n(t) \rightarrow u(t)$ quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $t \in [a, d)$. On va montrer que

$$(11.1) \quad \forall t \in [a, d) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v(t) < u_n(t).$$

La conclusion suit en laissant $n \rightarrow \infty$.

Tout d'abord, montrons :

$$(11.2) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists d_n \in [a, d) \quad \forall t \in [a, d_n), \quad v(t) < u_n(t).$$

Si $v(a) < u_0 = u_n(a)$, (11.2) découle simplement de la continuité des fonctions v et u_n .

Supposons donc $v(a) = u_0 = u_n(a)$. On a alors

$$v'(a) \leq f(a, v(a)) = f(a, u_n(a)) \\ < f(a, u_n(a)) + \frac{1}{n} = u_n'(a).$$

Ainsi, $v - u_n$ est strictement décroissante dans un voisinage à droite de a , d'où (11.2). Pour passer de (11.2) à (11.1), nous faisons un argument par continuité. Rebaptisons

$$d_n := \sup \{ \tau \in [a, d) ; v < u_n \text{ sur } [a, \tau) \} \in [a, d].$$

Supposons par l'absurde $d_n < d$. Alors, par continuité,

$$(11.3) \quad v(t) < u_n(t) \quad \forall t \in [a, d_n), \quad v(d_n) = u_n(d_n).$$

Alors,

$$v'(d_n) \leq f(d_n, v(d_n)) = f(d_n, u_n(d_n))$$

$$< f(d_n, u_n(d_n)) + \frac{1}{n} = u'_n(d_n),$$

donc $(v - u_n)(t)$ est strictement décroissante au point $t = d_n$, ce qui contredit (11.3). Ainsi, $d_n = d$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où (11.1). #

Preuve du théorème 11.1: (a) Définissons

$$f_i(t, \theta) = \frac{1}{p_i(t)} \cos^2 \theta + q_i(t) \sin^2 \theta, \quad i = 1, 2.$$

Alors, pour $i = 1, 2$, $g_i(t)$ est l'unique solution du

problème de Cauchy

$$\vartheta_i'(t) = f(t, \vartheta_i), \quad t \in [a, b),$$

$$\tan \vartheta_i(a) = \frac{x_i'(a)}{(px_i')(a)}, \quad \vartheta_i(a) \in [0, \pi).$$

Par hypothèse, $\vartheta_1' = f_1(t, \vartheta_1) \leq f_2(t, \vartheta_1)$.

Supposons $\vartheta_1(a) \leq \vartheta_2(a)$. Par le lemme 11.1 avec $u = \vartheta_2$ et $v = \vartheta_1$, on obtient immédiatement

$$(11.4) \quad \vartheta_1(t) \leq \vartheta_2(t), \quad t \in [a, b).$$

Supposons maintenant $\vartheta_1(a) < \vartheta_2(a)$. Soit $x_3(t)$ une solution de (HS1) dont l'angle de Prüfer $\vartheta_3(t)$ satisfait $\vartheta_3(a) = \vartheta_2(a)$. On déduit à nouveau

que $\vartheta_3(t) \leq \vartheta_2(t)$, $t \in [a, b)$.

De plus, $\vartheta_1(a) < \vartheta_3(a)$. Nous allons montrer que

$$\vartheta_1(t) < \vartheta_3(t), \quad t \in [a, b),$$

ce qui termine la preuve du cas (a).

Supposons par l'absurde qu'il existe $\tilde{t} \in [a, b)$ t.q.

$$\vartheta_1(\tilde{t}) = \vartheta_3(\tilde{t}) : \quad \frac{x_1(\tilde{t})}{(p, x_1')(\tilde{t})} = \frac{x_3(\tilde{t})}{(p, x_3')(\tilde{t})}$$

$$\hookrightarrow p_1(x_1 x_3' - x_1' x_3)(\tilde{t}) = 0$$

$$\text{i.e. } W[x_1, x_3](\tilde{t}) = 0.$$

Alors x_1 et x_3 sont linéairement dépendantes.

Ceci implique que $\vartheta_1 \equiv \vartheta_3$ sur $[a, b)$, une contradiction avec $\vartheta_1(a) < \vartheta_3(a)$.

(b) Par le point (a), nous savons déjà que (11.4) est satisfait. Supposons par l'absurde que

$$(11.5) \quad \vartheta_1(t) < \vartheta_2(t) \quad \forall t \in (c, b)$$

n'est pas vrai. Alors il existe $d \in (c, b)$ t.q.

$\vartheta_1(d) = \vartheta_2(d)$. Nous commençons par montrer que

$\vartheta_1 \equiv \vartheta_2$ sur $[a, d]$. Si ça n'est pas vrai, il existe

$\bar{t} \in [a, d]$ t.q. $\vartheta_1(\bar{t}) < \vartheta_2(\bar{t})$. Alors, par (a),

$$\vartheta_1(t) < \vartheta_2(t) \quad \forall t \in [\bar{t}, b),$$

ce qui contredit $\vartheta_1(d) = \vartheta_2(d)$.



Étant établi que $\vartheta_1 \equiv \vartheta_2$ sur $[a, d]$, on a alors

$$(11.6) \quad 0 = (\vartheta_1 - \vartheta_2)' = \left(\frac{1}{p_1(t)} - \frac{1}{p_2(t)} \right) \cos^2 \vartheta_i + (q_1(t) - q_2(t)) \sin^2 \vartheta_i$$

pour $i=1, 2$. Comme (HS2) est un majorant strict de (HS1), on déduit de la continuité de p_i, q_i qu'il existe un voisinage à droite V de c dans $[a, d]$ sur lequel :

soit (1) $q_1(t) < q_2(t) \quad \forall t \in V;$

soit (2) $p_1(t) > p_2(t), \quad q_2(t) \neq 0 \quad \forall t \in V.$

Cas (1) : Comme $p_1 \geq p_2$ et $q_1 < q_2$ sur V ,
on déduit de (11.6) que $\sin \theta_1 \equiv 0$ sur V ,
soit $\theta_1 \equiv 0 \pmod{\pi}$ sur V . Ainsi, $x_1 \equiv 0$ sur V
et on conclut par unicité que $x_1 \equiv 0$ sur $[a, b) \nparallel$.

Cas (2) : Comme $p_1 > p_2$ et $q_1 \leq q_2$ sur V ,
on déduit de (11.6) que $\cos \theta_2 \equiv 0$ sur V ,
soit $\theta_2 \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ sur V . Ainsi, $p_2 x_2' \equiv 0$
sur V . Par (HS2), on a alors sur V :

$q_2 x_2 \equiv 0$, $q_2 > 0 \Rightarrow x_2 \equiv 0$. On déduit à
nouveau par unicité que $x_2 \equiv 0$ sur $[a, b) \nparallel$.

Ces contradictions prouvent (11.5). $\#$

Remarque 11.1: La condition $p_1(c) > p_2(c)$ n'est pas suffisante pour obtenir la conclusion forte (11.5), comme le montre l'exemple suivant :
sur $[0, \infty)$, soit $p_1 \equiv 2$, $p_2 \equiv 1$

$$(p_1 x_1')' = 0, (p_2 x_2')' = 0; \theta_1(0) = \theta_2(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow p_1 x_1' \equiv p_2 x_2' \equiv 0 \Rightarrow \theta_1 \equiv \theta_2 \text{ sur } [0, \infty).$$

On déduit du théorème 11.1 les deux théorèmes de Sturm suivants.

Théorème 11.2 (théorème de comparaison):

Soit $x_1(t)$ une solution non-triviale de (HS1)

avec deux zéros consécutifs $a \leq t_1 < t_2 < b$.

(a) Si (HS2) est un majorant de (HS1), alors toute solution de (HS2) possède au moins un zéro dans l'intervalle $[t_1, t_2]$.

(b) Si (HS2) est un majorant strict de (HS1), alors toute solution de (HS2) possède au moins un zéro dans l'intervalle $[t_1, t_2]$.

Preuve: (a) Soit $x_2(t)$ une solution non-triviale de (HS2). Par la proposition 10.1, on peut supposer s.p.d.g. que $\vartheta_1(t_1) = 0$, $\vartheta_1(t_2) = \pi$, $\vartheta_2(t_1) = \alpha \in [0, \pi)$, où ϑ_i est l'angle de Prüfer de x_i , $i = 1, 2$.

Par le théorème 11.1 (a), $\vartheta_2(t_2) \geq \vartheta_1(t_2) = \pi$.

Comme ϑ_2 est continue, il existe $\tau \in [t_1, t_2]$ t.q.

$\vartheta_2(\tau) = \pi$, i.e. $x_2(\tau) = 0$.

(b) Par le théorème 11.1 (b), l'argument ci-dessus se renforce : $\vartheta_2(t_2) > \vartheta_1(t_2) = \pi \Rightarrow \exists \tau \in (t_1, t_2)$ t.q.

$\vartheta_2(\tau) = \pi$, i.e. $x_2(\tau) = 0$. #

En appliquant le théorème 11.2 à l'équation

$$(Hs) \quad (p(t)x')' + q(t)x = 0$$

avec $p, q \in C^0([a, b], \mathbb{R})$, $-\infty < a < b \leq \infty$, $p > 0$,
on obtient le résultat suivant.

Théorème 11.3 (théorème de séparation) :

Soit $x_1(t), x_2(t)$ deux solutions linéairement indépendantes de (HS). Entre deux zéros consécutifs de x_1 , il existe un zéro de x_2 , et vice versa.

Preuve : On remarque tout d'abord que (HS) est un majorant de lui-même. Soit $a \leq t_1 < t_2 < b$ deux zéros consécutifs de x_1 . Par le théorème 11.2, x_2 possède un zéro $T \in [t_1, t_2]$. De plus, $T = t_2$ est impossible. En effet, si $T = t_2$ on a alors $W[x_1, x_2](t_2) = p(t_2)(x_1(t_2)x_2'(t_2) - x_1'(t_2)x_2(t_2)) = 0$, ce qui contredit l'indépendance linéaire de x_1 et x_2 . #

Problèmes de Sturm-Liouville avec conditions de bord séparées (Kong, Section 6.6)

On cherche les valeurs propres $\lambda \in \mathbb{C}$ et les fonctions propres correspondantes du problème

$$(SL) \quad - (p(t)x')' + q(t)x = \lambda w(t)x, \quad t \in [a, b],$$

où $p, q, w \in C^0([a, b], \mathbb{R})$, $p, w > 0$ sur $[a, b]$,
avec les conditions au bord

$$(S) \quad \begin{cases} \cos \alpha x(a) - \sin \alpha (px')(a) = 0, & \alpha \in [0, \pi), \\ \cos \beta x(b) - \sin \beta (px')(b) = 0, & \beta \in (0, \pi]. \end{cases}$$

L'exemple suivant est élémentaire et représentatif.

Exemple 11.1 : Le problème

$$-x'' = \lambda x, \quad x(0) = x(1) = 0 \quad (\alpha = 0, \beta = \pi)$$

a les valeurs propres et fonctions propres

$\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ données explicitement par :

$$\lambda_n = ((n+1)\pi)^2, \quad u_n(t) = \sin((n+1)\pi t), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Clairement, $\lambda_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$ et, si $n \neq m$, les fonctions propres u_n et u_m sont orthogonales :

$$\int_0^1 u_n(t) u_m(t) dt = 0.$$

La théorie développée ci-dessus permet de généraliser

les résultats élémentaires au problème (SL)-(S).

Théorème 11.4 : Toutes les valeurs propres et fonctions propres du problème (SL)-(S) sont réelles. Les valeurs propres forment une suite croissante et bornée inférieurement $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, avec $\lambda_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). Pour chaque $n \in \mathbb{N}_0$, λ_n a multiplicité géométrique 1, et les fonctions propres associées ont exactement n zéros dans (a, b) .

De plus, si $n \neq m$, deux fonctions propres u_n, u_m associées respectivement à λ_n et λ_m satisfont

$$\int_a^b u_n(t) u_m(t) w(t) dt = 0.$$